حلول عددية للمعادلات الجبرية *

عبد النور زرفة **

د. كعبوش عز الدين ***

---

* تاريخ التسليم: 27/ 2/ 2015م، تاريخ القبول: 7/ 2/ 2016م.

** طالب/ هندسة كيميائية/ جامعة أم البواقي/ الجزائر.

*** مشرف/ جامعة أم البواقي/ الجزائر.

ملخص:

يتلخص موضوع البحث في تطبيق طريقة لحل المعادلات وإيجاد تقريب الجذور. ونعرف أن عند دراسة دالة ما نقوم بإيجاد حل المشتقة $f'(x)=0$ وفي بعض أحيان دراسة هذه الدالة صعبا خاصة إذا كانت الدالة $f(x)$ معقدة مثلا ذات الأس السادس وأكثر، و منه تطور البحث على طرق عددية تسهل عملية إيجاد حلول المشتقة $f'(x)=0$ مهما كانت صعبة، وهذا هو بحث يكمن في تطبيق طريقة في التحليل العددي تسهل عملية إيجاد جذور المشتقة $f'(x)=0$ باستعمال الدالة $f(x)$ فقط مهما كانت معقدة أو صعبة في زمن قليل جدا.

Numerical Solutions of Algebraic Equations

Abstract:

The aim of the subject of our research is to apply a method to solve equations and to find the approximation of roots. We know that when we study a function, we have to find a solution for the derivative f' (x) =0. Sometimes this function is hard to study, especially if the function f (x) is complex, such as Exponential Functions. The paper shows different methods and ways that facilitate the procedure of finding a solution to the derivative f' (x) =0 no matter how difficult a function is. The researcher applies a method in the numerical analysis that facilitate the procedure of finding the roots of the derivative f' (x) =0 using only function f (x) no matter how complex or difficult it is and at the same time it takes a short time to be solved.

1. المقدمة :

التحليل العددي هو أحد فروع الرياضيات المهمة، وهو الذي يربط بين الرياضيات التحليلية، والحساب الآلي، ويستخدم عادة في إيجاد بعض حلول المسائل والمشكلات $f(x)=0$ [2] 0= (x) f. التي يصعب حلها أو يستغرق حلها وقتاً طويلاً [1]. فالطرق التقليدية لا تفلح كثيرا في حل المعادلات ذات الدرجات العالية من الدرجة الخامسة أو السادسة مثلا، و لكن يمكننا حلها بالطرق العددية، وبالأخص في المعادلات التي تحتاج إلى التكرار من أجل الوصول إلى نتيجة أو إيجاد الحل التقريبي؛ وبالتالي فإن الحل المثالي هو أخذ النقاط التقريبية المقربة لقيمة الجذر، و كلما كان التكرار قليلا كانت هذه الطريقة أفضل، و أما الدقة فهي الفارق بين الحل العددي و الحل المضبوط، و كلما كان صغيرا كلما كانت الطريقة أفضل [3] .

لا زالت عملية إيجاد حل المعادلات لا تملك حلا مغلق الشكل أي بمعنى آخر لا توجد طريقة أو قاعدة تعطي الحل الدقيق أو صحيح، و لذلك يجب أن تحل بالطرق العددية. (4) إذا التحليل العددي هو علم التقريب حيث يتم استخدام طرق عددية لحل المعادلات المعقدة، و غير قابلة لحل.

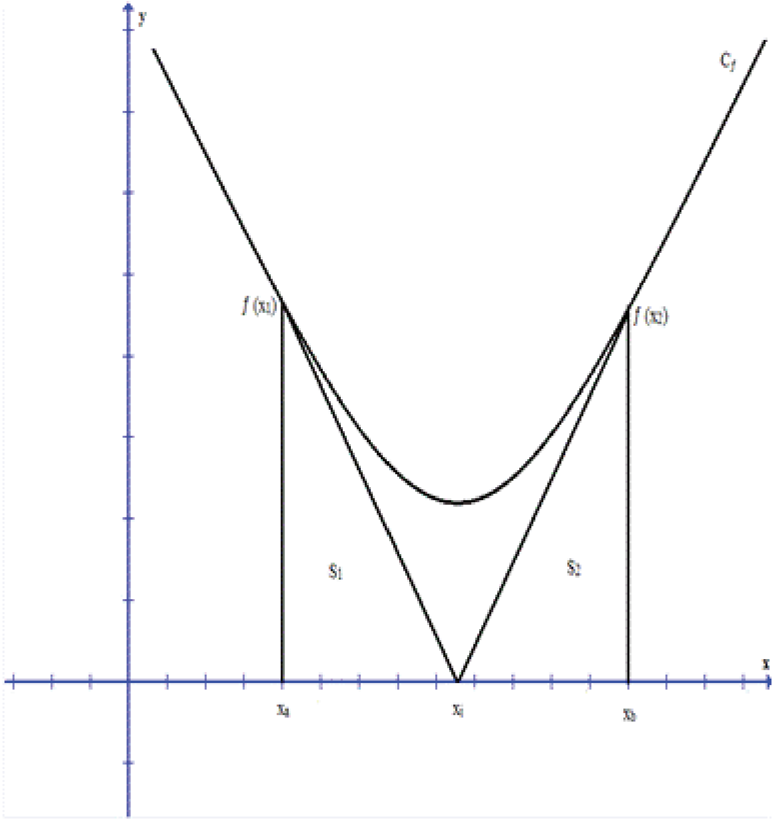
ونجد على سبيل المثال عند دراسة دالة ما f(x) فإننا نقوم بحساب المشتقة $f'(x)=0$ و في بعض أحيان يكون حلها صعبا يعني اللجوء إلى الطرق العددية كطريقة نيوتن أو نيوتن– رافسون مثلا و هذه الطريقة الجديدة أيضا لها دور في إيجاد الحل التقريبي كباقي الطرق، ولكن ميزتها عن طرق أخرى لأنها تستعمل الدالة f(x) لإيجاد القيم التقريبية لمشتقة الدالة $f'(x)=0$.

2. البرهان الرياضي لطريقة الجديدة:

إن معظم المعادلات التي تظهر خلال التطبيقات العملية تكون غير خطية، وحل هذه المعادلات أو إيجاد الجذور لها ليس بالأمر السهل لذلك نستخدم الطرق العددية لإيجاد هذه الجذور أو على أقل قيم تقريبية، وذلك بالبحث عن قيم x التي تجعل المقدار $f'(x)$ أصغر ما يمكن [1].

لنفرض أن لدينا دالة f (x) معرفة و متصلة على المجال [xa , xb] و $x_i \in [x_a ; x_b]$ نريد إيجاد الحل التقريبي لمشتقة الدالة $f'(x)=0$ و ليكن xi حيث (i=1,2,3,....) هو الحل

التقريبي لهذه الأخير الذي يحقق الشرط $f'(xi) = 0$ حيث $(i=1,2,3,....)$ نقول: إن xi هو حل المشتقة $f'(x)$ على المجال $[x_a , x_b]$، و نفرض أن S1 و S2 مثلثين متساوياً في المساحة. الرسم البياني يوضح كل من C_f رسما بيانيا لدالة $f (x)$ و S_1 و S_2 (الشكل 1).



و منه ;

يمكننا البرهان على العبارة باستعمال الرسم السابق و المثلثان S_1 و S_2

بالنسبة لمثلث S_1

يمكننا حساب مساحة المثلث S_1 حسب الشكل الموضح في الرسم البياني ;

$$S_1= [f (x_a) (x_i- x_a)]/ 2 \qquad (1)$$

بالنسبة لمثلث S_2

يمكننا أيضا حساب مساحة المثلث S_2 حسب الشكل الموضع في الرسم البياني ;

$$S_2=[f (x_b) (x_b- x_i)]/ 2 \qquad (2)$$

و قد عرفنا سابقا أن

$$S_1 = S_2$$

$$[f(x_a)(x_i - x_a)]/2 = [f(x_b)(x_b - x_i)]/2$$

$$x_i[f(x_a) + f(x_b)] = f(x_b)x_b + f(x_a)x_a$$

$$xi = \frac{f(x_b)x_b + f(x_a)x_a}{f(xa) + f(xb)} \qquad (3)$$

إذا هذه هي العبارة النهائية التي تمكننا من حساب x_i (i=1. 2. 3.....)

2. طريقة العمل:

بعد التعرف على البرهان، نتطرق إلى كيفية استعمالها، و هي كطرق العددية الأخرى لها خطوات نتبعها بانتظام تمكننا من حساب x_i (i=1. 2. 3.....)

- الخطوة الأولى:

لتكن $x_i \in [x_a ; x_b]$:

- نحسب x_1 (i=1 هي العملية الأولى) باستعمال العبارة [3].
- نحسب $f'(x_1)$ و إذا تحقق الشرط $f'(x_1)=0$ إذا x_1 هو الحل.
- إذا لم يتحقق الشرط $f'(x_1) \neq 0$ نكمل العملية حسب الخطوة الثانية.

- الخطوة الثانية:

في هذه الخطوة نحسب x_2 و لكن عند مجال جديد و لإيجاد المجال الجديد نتبع ما يأتي:

- نعلم أن $f'(x_a) \times f'(x_b) < 0$ إذا:

- المرحلة الأولى: إذا كان $f'(x_a) < 0$ فإن $f'(x_b) > 0$

1. و كانت قيمة $f'(x_1) > 0$:

نضع $x_b = x_1$ و يصبح المجال هو $[x_a ; x_1]$.

2. أو كانت قيمة $f'(x_1) < 0$:

نضع $x_a = x_1$ و يصبح المجال هو $[x_1 ; x_b]$.

ثم نحسب x_2 على المجال الجديد باستعمال العبارة [3] و إذا تحقق الشرط $f'(x_2) = 0$ إذا x_2 هو الحل.

و إذا لم يتحقق الشرط $f'(x_2) \neq 0$ نكمل الحساب بنفس مراحل الخطوة الثانية حتى يتحقق الشرط $f'(x_i) = 0$ حيث $(i=1,2,3,....)$.

- المرحلة الثانية: أو إذا كان $f'(x_a) > 0$ فإن $f'(x_b) < 0$

1. و كانت قيمة $f'(x_1) > 0$:

نضع $x_a = x_1$ و يصبح المجال هو $[x_1 ; x_b]$.

2. أو كانت قيمة $f'(x_1) < 0$:

نضع $x_b = x_1$ و يصبح المجال هو $[x_a ; x_1]$.

ثم نحسب x_2 على المجال الجديد باستعمال العبارة [3] و إذا تحقق الشرط $f'(x_2) = 0$ إذا x_2 هو الحل.

و إذا لم يتحقق الشرط $f'(x_2) \neq 0$ نكمل الحساب بنفس مراحل الخطوة الثانية حتى أن يتحقق الشرط $f'(x_i) = 0$ حيث $(i=1,2,3,....)$.

3. تطبيقات

$f(x) = 2x^2 - 5x + 1$					$f'(x) = 4x - 5$			
i	x_a	x_b	$f(x_a)$	$f(x_b)$	$f'(x_a)$	$f'(x_b)$	x_i	$f'(x_i)$
	1	1.5	2 -	2 -	1 -	1		
1	1	1.5	2 -	2 -	1-	1	1.25	0

$f(x) = x^2 - 1$					$f'(x) = 2x - 1$			
i	x_a	x_b	$f(x_a)$	$f(x_b)$	$f'(x_a)$	$f'(x_b)$	x_i	$f'(x_i)$
	0.25	0.75	0.1875 -	0.1875 -	0.5 -	0.5		
1	0.25	0.75	0.1875 -	0.1875 -	0.5 -	0.5	0.5	0

$f(x) = \exp(2x) - 13x$					$f'(x) = 2\exp(2x) - 13$			
i	x_a	x_b	$f(x_a)$	$f(x_b)$	$f'(x_a)$	$f'(x_b)$	x_i	$f'(x_i)$
	0.8	1	5.447 -	5.6109 -	3.0939 -	1.7781		
1	0.8	1	5.447 -	5.6109 -	3.0939 -	1.7781	0.901482198	0.8648 -

f (x) = exp (2x) – 13x					f' (x) = 2exp (2x) - 13			
i	x_a	x_b	f (x_a)	f (x_b)	f' (x_a)	f' (x_b)	x_i	f' (x_i)
2	0.901482198	1	5.6517 -	5.6109 -	0.8648 -	1.7781	0.950562653	0.3868
3	0.901482198	0.950562653	5.6517 -	5.6639 -	0.8648 -	0.3868	0.926048883	0.2537 -
4	0.926048883	0.950562653	5.6655 -	5.6639 -	0.2537 -	0.3868	0.938304037	0.0626
5	0.926048883	0.938304037	5.6655 -	5.6666 -	0.2537 -	0.0626	0.932177054	0.0965 -
6	0.932177054	0.938304037	5.6665 -	5.6666 -	0.0965 -	0.0626	0.935240572	0.0152 -
7	0.935240572	0.938304037	5.6667 -	5.6666 -	0.0172 -	0.0626	0.936772291	0.0227
8	0.935240572	0.936772291	5.6667 -	5.6667 -	0.0172 -	0.0227	0.936006431	0.0027
9	0.935240572	0.936006431	5.6667 -	5.6667 -	0.0172 -	0.0027	0.935623501	0.0072 -
10	0.935623501	0.936006431	5.6667 -	5.6667 -	0.0072 -	0.0027	0.935814966	0.0022 -
11	0.935814966	0.936006431	5.6667 -	5.6667 -	0.0022 -	0.0027	0.935910698	0.0002
12	0.935814966	0.935910698	5.6667 -	5.6667 -	0.0022 -	0.0002	0.935862832	0.001 -
13	0.935862832	0.935910698	5.6667 -	5.6667 -	0.001 -	0.0002	0.935886765	0.0004 -
14	0.935886765	0.935910698	5.6667 -	5.6667 -	0.0004 -	0.0002	0.935898731	6.1294 - 10^{-5}
15	0.935898731	0.935910698	5.6667 -	5.6667 -	6.1294 - 10^{-5}	0.0002	0.935904714	9.4265 10^{-5}
16	0.935898731	0.935904714	5.6667 -	5.6667 -	6.1294 - 10^{-5}	9.4265 10^{-5}	0.935901722	1.6472 10^{-5}
17	0.935898731	0.935901722	5.6667 -	5.6667 -	6.1294 - 10^{-5}	1.6472 10^{-5}	0.935900226	2.2424 - 10^{-5}
18	0.935900226	0.935901722	5.6667 -	5.6667 -	2.2424 - 10^{-5}	1.6472 10^{-5}	0.935900974	2.9757 - 10^{-6}
19	0.935900974	0.935901722	5.6667 -	5.6667 -	2.9757 - 10^{-6}	1.6472 10^{-5}	0.935901348	6.7483 10^{-6}
20	0.935900974	0.935901348	5.6667 -	5.6667 -	2.9757 - 10^{-6}	6.7483 10^{-6}	0.935901161	1.8863 10^{-6}
21	0.935900974	0.935901161	5.6667 -	5.6667 -	2.9757 - 10^{-6}	1.8863 10^{-6}	0.935901067	5.5772 - 10^{-7}

f (x) = exp (2x) – 13x					f’ (x) = 2exp (2x) - 13			
i	x_a	x_b	f (x_a)	f (x_b)	f’ (x_a)	f’ (x_b)	x_i	f’ (x_i)
22	0.935901067	0.935901161	5.6667 -	5.6667 -	5.5772 - 10^{-7}	1.8863 10^{-6}	0.935901114	6.6428 10^{-7}
23	0.935901067	0.935901114	5.6667 -	5.6667 -	5.5772 - 10^{-7}	6.6428 10^{-7}	0.935901090	4.0279 10^{-8}
24	0.935901067	0.935901090	5.6667 -	5.6667 -	5.5772 - 10^{-7}	4.0279 10^{-8}	0.935901078	2.7172 - 10^{-7}
25	0.935901078	0.935901090	5.6667 -	5.6667 -	2.7172 - 10^{-7}	4.0279 10^{-8}	0.935901084	1.1572 - 10^{-7}
26	0.935901084	0.935901090	5.6667 -	5.6667 -	1.1572 - 10^{-7}	4.0279 10^{-8}	0.935901087	3.7721 - 10^{-8}
27	0.935901087	0.935901090	5.6667 -	5.6667 -	3.7721 - 10^{-8}	4.0279 10^{-8}	0.935901088	

5. النتائج:

1. نلاحظ من الأمثلة السابقة عند دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية أننا نجد الحل لها من عملية واحدة فقط.

2. هي طريقة سهلة وسريعة في الحساب، ولها دور كبير في إيجاد الحل لأكبر المعادلات ذات الدرجات العالية

3. عدد التكرار لإيجاد الحل يتقلص مقارنة مع الطرق العددية الأخرى.

المصادر والمراجع:

1. أ د محمد منصور صبح، د صالح بن منيع الحربي– التحليل العددي و طرق حساب العددي– 2008 –مكتبة الرشد –صفحة 1.
2. عمر محمد التومي، أحمد حمر الشوشة– التحليل العددي.
3. العكري الناصر، بن قويدر الحاج– مذكرة لنيل شهادة أستاذ التعليم المتوسط– 2008.
4. معروف محمد حديد، عبدالاله يونس، رشيد عبد الرزاق الصالحي – الطرق العددية في الهندسة – دار الكتب– 1982.