بسم الله الرحمن الرحيم

الوحدة السابعة: النسب المثلثية

الدرس الثاني: جيب تمام الزاوية الحادة

أهداف الدرس:

١- أن يحسب الطالب جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية.

٢- أن يحسب الطالب قياس الزاوية إذا عُلِم جيب تمامها.

٣- أن يحل الطالب مسائل عملية على جيب التمام.

الزمن: حصتان دراسيتان مدة كل حصة (٤٠) دقيقة.

الحصة الأولى (٢/١)

التوزيع المقترح لوقت الحصة: التمهيد (٦ دقائق)، المهمة الأولى (١٢ دقيقة)، المهمة الثانية (١٠ دقائق)، التقويم (٨ دقائق)، الملخص والواجب البيتي (٤ دقائق).

التمهيد:

الترحيب بالطلبة ثم تذكيرهم في صورة تدريس جمعي بجيب الزاوية (الدرس السابق) من خلال طرح مجموعة من الأسئلة المباشرة عليهم مثل:

- ماذا نسمي الضلع المقابل للزاوية القائمة؟ ماذا نسمي الضلعين الآخرين بالنسبة لإحدى الزوايا؟
- ما هو نص نظرية فيثاغورس؟
- ما النسبة التي نجد من خلالها جيب الزاوية الحادة؟
- ماذا يرمز لجيب الزاوية؟
- ما اختصار جيب الزاوية باللغة الإنجليزية؟
- كيف نجد جيب زاوية معلومة؟
- كيف نجد قياس الزاوية إذا عُلِم قيمة الجيب لها؟
- ما قيمة جا ٣٠°، جا ٦٠°؟

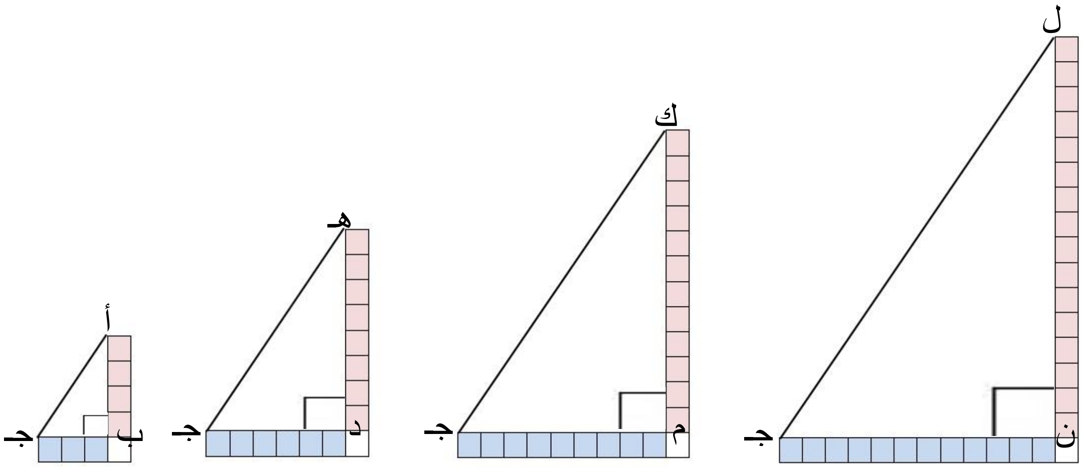
كما يمكن طرح المثال الآتي لتذكير الطلبة بطريقة إيجاد جيب الزاوية:

هـ و د مثلث قائم الزاوية في و ، فيه هـ و = ٦ سم ، و د = ٨ سم ، احسب جا د ، جا هـ .

تطبيق النموذج بمراحله الثلاث:

١- **المهام (Tasks):** حيث يتم تقديم المهمة الأولى للطلبة من خلال عرضها عليهم بصورة جماعية باستخدام جهاز العرض (الداتاشو).

استخدم أحمد مكعبات الليجو لصنع أربع زوايا قائمة، ثم ربط ضلعي القائمة بخيط فحصل على أربعة مثلثات قائمة الزاوية كما في الأشكال الآتية.



إذا علمت أن طول ضلع مكعب الليجو وحدة واحدة فساعد أحمد على إيجاد النسبة بين طول الضلع المجاور للزاوية جـ وطول الوتر في المثلثات الأربعة.

بعد التأكد من فهم الطلبة للمهمة والمطلوب يتم الانتقال للمرحلة التالية.

٢- **المجموعات المتعاونة (Cooperative groups):** حيث يعمل الطلبة في مجموعات تم تحديدها مسبقا لإنجاز المهمة السابقة من خلال التفكير في المهمة المعطاة بالطريقة التي يرونها مناسبة للوصول إلى الحل، مستخدمين خطوات حل المشكلة المتمثلة بالخطوات الأربع الآتية: فهم المشكلة، التخطيط للحل، تنفيذ الحل، والتأكد من صحة الحل، وتقوم كل مجموعة بتدوين الحلول التي توصلت إليها. مع مراعاة أن يقوم المعلم أثناء عمل المجموعات بالمراقبة والتجوال فيما بينها ومحاورة الطلبة دون أن يعطيهم الإجابات الصحيحة، كما يعمل على تشجيعهم على التفكير والحوار، ويمكن أن يقوم بإعطاء بعض التلميحات إذا وجد أن هناك بعض المجموعات التي لا تستطيع إكمال المهمة.

٣- **المشاركة (Sharing):** بعد انتهاء الوقت المخصص لمرحلة المجموعات المتعاونة، يتم العمل ضمن فريق واحد من خلال عرض المجموعات المتعاونة للحلول والأفكار التي توصلت إليها ومناقشتها مع باقي المجموعات

لتعميق الفهم، ويتولى المعلم إدارة النقاش بين الطلبة وتقويم ما يتم التوصل إليه، والعمل في النهاية على تلخيص الإجابات والأفكار والحلول السليمة وتقديمها للطلبة بشكل مناسب مثل:

فهم المشكلة: كل شكل يمثل مثلثا قائم الزاوية، طول ضلع مكعب الليجو وحدة واحدة، المطلوب إيجاد النسبة بين طول الضلع المجاور للزاوية جـ وطول الوتر في المثلثات الأربعة.

التخطيط للحل: الخيط يمثل الوتر في المثلث، الضلع الأفقي للقائمة يمثل الضلع المجاور للزاوية جـ في كل المثلثات، يمكن استخدام نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الخيط، وحساب طول الضلع المجاور في كل مثلث، ومن ثم إيجاد النسبة المطلوبة.

تنفيذ الحل: باستخدام نظرية فيثاغورس نجد أن

- طول الخيط في المثلث أ ب جـ = طول الوتر = ٥ وحدات
- طول الخيط في المثلث هـ د جـ = طول الوتر = ١٠ وحدات
- طول الخيط في المثلث ك م جـ = طول الوتر = ١٥ وحدة
- طول الخيط في المثلث ل ن جـ = طول الوتر = ٢٠ وحدة

ولإيجاد النسبة بين طول الضلع المجاور للزاوية جـ وطول الوتر في المثلثات الأربعة يمكن عمل الجدول الآتي:

المثلث	طول المجاور (بالوحدة)	طول الوتر (بالوحدة)	$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$
أ ب جـ	٣	٥	$\frac{٣}{٥}$
هـ د جـ	٦	١٠	$\frac{٦}{١٠}$
ك م جـ	٩	١٥	$\frac{٩}{١٥}$
ل ن جـ	١٢	٢٠	$\frac{١٢}{٢٠}$

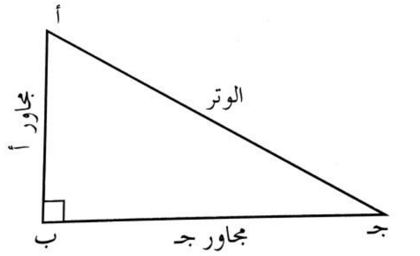
التأكد من صحة الحل: هل أوجدنا كل المطلوب؟ هل القاعدة التي استخدمناها صحيحة؟ هل كل خطوات الحل صحيحة؟ هل الحسابات التي قمنا بها صحيحة؟ هل يبدو الجواب منطقيا؟

ليصل معهم إلى أن النسبة $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ هي نسبة ثابتة وتمثل نسبة طول الضلع المجاور للزاوية جـ إلى طول الوتر في المثلث قائم الزاوية، وتسمى هذه النسبة جيب تمام الزاوية الحادة جـ ويرمز لها بالرمز (جتا جـ) وبالإنجليزية (Cosine) واختصارا (cos).

ويعرض المعلم بعدها مثلثا قائم الزاوية ويعين عليه الرؤوس (أ ب جـ) ويجد الطلبة جتا أ، جتا جـ

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية أ}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$$

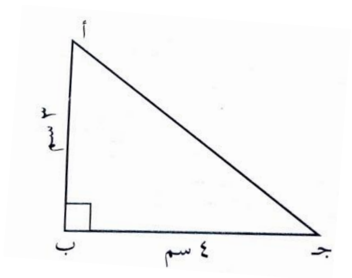
$$\text{جتا جـ} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية جـ}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$$



بعد ذلك **نطبق النموذج** بمراحله الثلاث على المهمة التالية:

١. **المهام (Tasks):** حيث يتم تقديم المهمة الثانية للطلبة من خلال عرضها عليهم بصورة جماعية باستخدام جهاز العرض (الداتاشو).

في الشكل المجاور، أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، فيه أ ب = ٣ سم، ب جـ = ٤ سم، جد كلا مما يأتي:



١- أ جـ

٢- جتا أ

٣- جتا جـ

٤- جا أ

٥- جا جـ

بعد التأكد من فهم الطلبة للمهمة والمطلوب يتم الانتقال للمرحلة التالية.

٢. **المجموعات المتعاونة (Cooperative groups):** حيث يعمل الطلبة في مجموعات تم تحديدها مسبقا لإنجاز المهمة السابقة من خلال التفكير في الطريقة المناسبة لإيجاد المطلوب، مستخدمين خطوات حل المشكلة المتمثلة بالخطوات الأربع الآتية: فهم المشكلة، التخطيط للحل، تنفيذ الحل، والتأكد من صحة الحل، وتقوم كل مجموعة بتدوين الحلول التي توصلت إليها. مع مراعاة أن يقوم المعلم أثناء عمل المجموعات بالمراقبة والتجوال فيما بينها ومحاورة الطلبة دون أن يعطيهم الإجابات الصحيحة، كما يعمل على تشجيعهم على التفكير والحوار، ويمكن أن يقوم بإعطاء بعض التلميحات إذا وجد أن هناك بعض المجموعات التي لا تستطيع إكمال المهمة.

٣. **المشاركة (Sharing):** بعد انتهاء الوقت المخصص لمرحلة المجموعات المتعاونة، يتم العمل ضمن فريق واحد من خلال عرض المجموعات المتعاونة للحلول والأفكار التي توصلت إليها ومناقشتها مع باقي المجموعات لتعميق الفهم، ويتولى المعلم إدارة النقاش بين الطلبة وتقويم ما يتم التوصل إليه، والعمل في النهاية على تلخيص الإجابات والأفكار والحلول السليمة وتقديمها للطلبة بشكل مناسب مثل:

فهم المشكلة: الشكل يمثل مثلثا قائم الزاوية، طول الضلع أ ب = ٣ سم، طول الضلع ب جـ = ٤ سم، المطلوب طول الوتر وقيمة الجيب للزاويتين وقيمة جيب التمام للزاويتين.

التخطيط للحل: يمكن استخدام نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الوتر أ جـ، وتطبيق قانون الجيب لإيجاد جا أ و جا جـ، وتطبيق قانون جيب التمام لإيجاد جتا أ و جتا جـ.

تنفيذ الحل:

١. من الشكل المعطى ووفق نظرية فيثاغورس

$$(\text{أ جـ})^{٢} = (\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}$$

$$= ٣^{٢} + ٤^{٢}$$

$$= ٩ + ١٦ = ٢٥$$

إذا طول الوتر أ جـ $= \sqrt{٢٥} = ٥$ سم

٢. $\text{جتا أ} = \dfrac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية أ}}{\text{طول الوتر}} = \dfrac{٣}{٥}$

٣. $\text{جتا جـ} = \dfrac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية جـ}}{\text{طول الوتر}} = \dfrac{٤}{٥}$

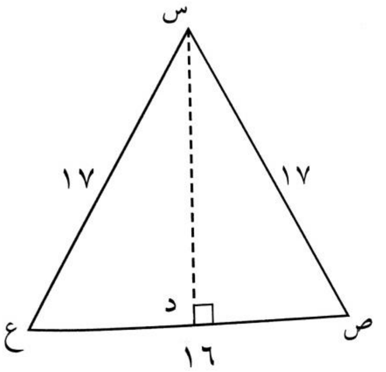
٤. $\text{جا أ} = \dfrac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{طول الوتر}} = \dfrac{٤}{٥}$

٥. $\text{جا جـ} = \dfrac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية جـ}}{\text{طول الوتر}} = \dfrac{٣}{٥}$

التأكد من صحة الحل: هل أوجدنا كل المطلوب؟ هل القاعدة التي استخدمناها صحيحة؟ هل كل خطوات الحل صحيحة؟ هل الحسابات التي قمنا بها صحيحة؟ هل يبدو الجواب منطقيا؟

ومن الجيد هنا تنبيه الطلبة إلى عدم قبول أن تكون أ جـ = −٥ لأنها تمثل طولا. وأن قيمة جيب التمام دائما أق من ١، كما ينبغي أن نلفت انتباه الطلاب إلى ملاحظة أن جا أ = جتا جـ ، جا جـ = جتا أ ، وأن الزاويتين أ ، جـ متتامتان (مجموعهما ٩٠ °) وأن هذه العلاقة ستُدرس لاحقا.

التقويم: يقوم المعلم بالتأكد من تحقق أهداف الدرس من خلال قيام الطلبة بحل المشكلة الآتية:



١- في الشكل المجاور، إذا كان س ص = س ع = ١٧ سم

ص ع = ١٦ سم ، فجد كلا مما يأتي:

جا ع ، جتا ع ، جتا ∢ د س ع .

الملخص والواجب البيتي: يقدم المعلم في النهاية ملخصا للحصة ويكلفهم بحل المشكلة الآتية كواجب بيتي:

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، فيه أ ب = ب جـ = س، جد:

١- ق ∢ أ + ق ∢ جـ

٢- أ جـ

٣- جتا أ

٤- جا أ

٥- جتا جـ

٦- جا جـ

٧- جتا^{٢} أ + جتا^{٢} (٩٠° – أ)

٨- جا ٤٥°

٩- جتا ٤٥°

الحصة الثانية (٢/٢)

التوزيع المقترح لوقت الحصة: التمهيد (٦ دقائق)، المهمة الأولى (٨ دقائق)، المهمة الثانية (١٢ دقيقة)، التقويم (٨ دقائق)، الملخص والواجب البيتي (٦ دقائق).

التمهيد:

الترحيب بالطلبة ثم تذكيرهم بما تم التوصل له في الحصة السابقة من تعريف لجيب تمام الزاوية والقانون المستخدم لإيجاده

تطبيق النموذج بمراحله الثلاث:

ونبدأ بالمهمة الأولى والمتمثلة في استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد جيب تمام زاوية معلومة وإيجاد قياس الزاوية إذا عُلِم قيمة جيب التمام لها.

١- **المهام (Tasks):** حيث يتم تقديم المهمة الأولى للطلبة من خلال عرضها عليهم بصورة جماعية باستخدام جهاز العرض (الداتاشو).

أ- استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد جيب تمام الزوايا الآتية: ١٥°، ٣٥°، ٦٠°، ٧٥°.

ب- استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياس الزاوية س إذا علمت أن قيمة

- جتا س = ٠,١٧٣٦
- جتا س = ٠,٥
- جتا س = ٠,٨٦٦٠
- جتا س = ٠,٩٨٤٨

بعد التأكد من فهم الطلبة للمهمة والمطلوب يتم الانتقال للمرحلة التالية.

٢- **المجموعات المتعاونة (Cooperative groups):** حيث يعمل الطلبة في مجموعات تم تحديدها مسبقا لإنجاز المهمة السابقة من خلال التفكير في المهمة المعطاة بالطريقة التي يرونها مناسبة للوصول إلى الحل، مستخدمين خطوات حل المشكلة المتمثلة بالخطوات الأربع الآتية: فهم المشكلة، التخطيط للحل، تنفيذ الحل، والتأكد من صحة الحل، وتقوم كل مجموعة بتدوين الحلول التي توصلت إليها. مع مراعاة أن يقوم المعلم أثناء عمل المجموعات بالمراقبة والتجوال فيما بينها ومحاورة الطلبة دون أن يعطيهم الإجابات الصحيحة، كما يعمل على تشجيعهم على التفكير والحوار، ويمكن أن يقوم بإعطاء بعض التلميحات إذا وجد أن هناك بعض المجموعات التي لا تستطيع إكمال المهمة.

٣- **المشاركة (Sharing):** بعد انتهاء الوقت المخصص لمرحلة المجموعات المتعاونة، يتم العمل ضمن فريق واحد من خلال عرض المجموعات المتعاونة للحلول والأفكار التي توصلت إليها ومناقشتها مع باقي المجموعات لتعميق الفهم، ويتولى المعلم إدارة النقاش بين الطلبة وتقويم ما يتم التوصل إليه، والعمل في النهاية على تلخيص الإجابات والأفكار والحلول السليمة وتقديمها للطلبة بشكل مناسب مثل:

فهم المشكلة: المطلوب استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد جيب تمام زوايا معلومة وكذلك استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد قياس زاوية إذا علمت قيمة جيب التمام لها.

التخطيط للحل: تستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد جيب تمام زاوية معلومة عن طريق فتح الآلة الحاسبة وإدخال قياس الزاوية، ثم الضغط على المفتاح ((cos)). كما تستخدم في إيجاد قياس الزاوية إذا عُلِم قيمة الجيب لها عن طريق فتح الآلة الحاسبة وإدخال قيمة جيب الزاوية، ثم الضغط على المفتاح ((Inv)) ثم الضغط على المفتاح ((cos))

تنفيذ الحل:

أ- استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد جيب تمام الزوايا

- ادخال ١٥ ثم الضغط على المفتاح ((cos)) لنحصل على القيمة ٠,٩٣٩٦٩٢٦٢٠٧٨٥٩٠٨٣٨٤٠٥٤١٠٩ وبالتالي جتا ١٥° = ٠,٩٦٥٩ تقريبا. وهكذا نكمل مع باقي الزوايا المطلوب إيجاد قيمة جيب التمام لها.
- جتا ٣٥° = ٠,٨١٩٢
- جتا ٦٠° = ٠,٥
- جتا ٧٥° = ٠,٢٥٨٨

ب- استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد قياس الزاوية س إذا علمت قيمة جيب التمام لها:

- جتا س = ٠,١٧٣٦ إدخال القيمة ٠,١٧٣٦ ثم الضغط على المفتاح ((Inv)) ثم الضغط على المفتاح ((cos)) لنحصل على القيمة ٨٠,٠٠٢٨٠٢٩٤٨١٥٨٢٠٧٩٣٣٩٩١٢٥٢٩٤٤٥٧٤ وبالتالي ⇦ س ≈ ٨٠ ° .
  وهكذا نكمل مع باقي القيم.
- جتا س = ٠,٥ ⇦ س = ٦٠ °
- جتا س = ٠,٨٦٦٠ ⇦ س ≈ ٣٠ °
- جتا س = ٠,٩٨٤٨ ⇦ س ≈ ١٠ °

التأكد من صحة الحل: هل أوجدنا كل المطلوب؟ هل استخدمنا الآلة الحاسبة بطريقة صحيحة؟ هل الحسابات التي قمنا بها صحيحة؟ هل يبدو الجواب منطقيا؟ هل راعينا طريقة استخدام الآلات الحاسبة المختلفة؟

والأفضل أن ينبه المعلم الطلبة لملاحظة أن قيمة جيب تمام الزاوية تقل بزيادة قياس الزاوية.

بعد ذلك **نطبق النموذج** بمراحله الثلاث على المهمة التالية:

1. **المهام (Tasks):** حيث يتم تقديم المهمة الثانية للطلبة من خلال عرضها عليهم بصورة جماعية باستخدام جهاز العرض (الداتاشو).

ربطت شركة الكهرباء عمود الكهرباء من قمته إلى نقطة على الأرض تبعد عن قاعدته (٤) م، فإذا كان السلك يكون مع الأرض زاوية قياسها ٦٤ °، فجد طول السلك، ثم جد طول العمود.

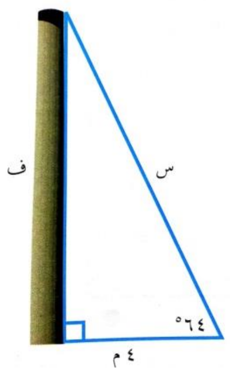
بعد التأكد من فهم الطلبة للمهمة والمطلوب يتم الانتقال للمرحلة التالية.

2. **المجموعات المتعاونة (Cooperative groups):** حيث يعمل الطلبة في مجموعات تم تحديدها مسبقا لإنجاز المهمة السابقة من خلال التفكير في الطريقة المناسبة لإيجاد المطلوب، مستخدمين خطوات حل المشكلة المتمثلة بالخطوات الأربع الآتية: فهم المشكلة، التخطيط للحل، تنفيذ الحل، والتأكد من صحة الحل، وتقوم كل مجموعة بتدوين الحلول التي توصلت إليها. مع مراعاة أن يقوم المعلم أثناء عمل المجموعات بالمراقبة والتجوال فيما بينها ومحاورة الطلبة دون أن يعطيهم الإجابات الصحيحة، كما يعمل على تشجيعهم على التفكير والحوار، ويمكن أن يقوم بإعطاء بعض التلميحات إذا وجد أن هناك بعض المجموعات التي لا تستطيع إكمال المهمة.

3. **المشاركة (Sharing):** بعد انتهاء الوقت المخصص لمرحلة المجموعات المتعاونة، يتم العمل ضمن فريق واحد من خلال عرض المجموعات المتعاونة للحلول والأفكار التي توصلت إليها ومناقشتها مع باقي المجموعات لتعميق الفهم، ويتولى المعلم إدارة النقاش بين الطلبة وتقويم ما يتم التوصل إليه، والعمل في النهاية على تلخيص الإجابات والأفكار والحلول السليمة وتقديمها للطلبة بشكل مناسب مثل:

فهم المشكلة: البعد بين النقطة وقاعدة العمود (٤) م، الزاوية بين السلك والأرض ٦٤ °، المطلوب طول السلك وطول العمود.

التخطيط للحل: نرسم شكلا توضيحيا للمشكلة، فنجد أن الشكل الناتج مثلث قائم الزاوية يمثل طول السلك فيه الوتر، في حين يمثل البعد بين النقطة وقاعدة العمود الضلع المجاور للزاوية ٦٤ ° بينما يمثل ارتفاع العمود الضلع المقابل للزاوية ٦٤ ° . وبالتالي يمكن استخدام علاقة جيب التمام التي تربط بين المجاور والوتر لإيجاد طول السلك. وعلاقة الجيب التي تربط بين المقابل والوتر لإيجاد طول العمود.



تنفيذ الحل:

نفرض أن طول السلك س ، وطول العمود ف كما في الشكل التوضيحي السابق

$$\text{جتا } ٦٤° = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٤}{\text{س}}$$

جتا ٦٤° = ٠,٤٣٨٣   عن طريق الآلة الحاسبة

$$\text{٠,٤٣٨٣} = \frac{\text{٤}}{\text{س}}$$

$$\text{ومنه س} = \frac{\text{٤}}{\text{٠,٤٣٨٣}} = \text{٩,١ م تقريبا.}$$

ولإيجاد طول العمود فإن:

$$\text{جا ٦٤°} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ف}}{\text{س}}$$

جا ٦٤° = ٠,٨٩٨٧   عن طريق الآلة الحاسبة

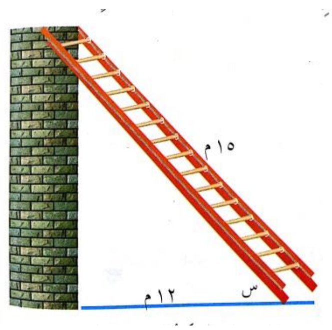
$$\text{٠,٨٩٨٧} = \frac{\text{ف}}{\text{٩,١}}$$

ومنه ف = ٠,٨٩٨٧ × ٩,١ = ٨,١٧ م طول العمود تقريبا.

التأكد من صحة الحل: هل أوجدنا كل المطلوب؟ هل القاعدة التي استخدمناها صحيحة؟ هل كل خطوات الحل صحيحة؟ هل الحسابات التي قمنا بها صحيحة؟ هل يبدو الجواب منطقيا؟ هل يوجد طريقة أخرى لإيجاد الحل؟

التقويم: يقوم المعلم بالتأكد من تحقق أهداف الدرس من خلال قيام الطلبة بحل المشكلة الآتية:

سلم طوله (١٥) مترا يتكئ طرفه العلوي على حائط رأسي وطرفه السفلي على أرض أفقية، فإذا كانت المسافة بين قاعدة الحائط والطرف السفلي للسلم (١٢) مترا، فجد قياس الزاوية (س) بين السلم وسطح الأرض.



الملخص والواجب البيتي: يقدم المعلم في النهاية ملخصا للحصة ويكلفهم بحل المشكلتين الآتيين كواجب بيتي:

١- ل م ن مثلث متساوي الساقين فيه ل م = ل ن = (١٠) سم، م ن = (١٦) سم، جد:

أ) جا م   ب) جتا ن   ج) جتا م

٢- يمثل الشكل المجاور قطعة أرض على شكل شبه منحرف، احسب محيط قطعة الأرض.