

بسم الله الرحمن الرحيم

الوحدة السابعة: النسب المثلثية

الدرس الرابع: العلاقة بين النسب المثلثية

أهداف الدرس:

أن يستقصي الطالب العلاقات الآتية:

•  $\text{جا } 90^\circ = \text{جنا } (90^\circ - \text{س})$

•  $\text{جنا } 90^\circ = \text{جا } (90^\circ - \text{س})$

•  $\text{جا}^2 \text{س} + \text{جنا}^2 \text{س} = 1$

•  $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \text{ظا } \text{س}$

الزمن: حصتان دراسيتان مدة كل حصة (٤٠) دقيقة.

الحصة الأولى (٢/١)

التوزيع المقترح لوقت الحصة: التمهيد (٦ دقائق)، المهمة الأولى (٨ دقائق)، التقويم (٦ دقائق)، المهمة الثانية (٨ دقائق)، التقويم (٦ دقائق)، الملخص والواجب البيتي (٦ دقائق).

**التمهيد:**

الترحيب بالطلبة ثم تذكيرهم في صورة تدريس جمعي بالدروس السابقة من خلال طرح مجموعة من الأسئلة المباشرة عليهم مثل:

- ما النسبة التي نجد من خلالها جيب الزاوية الحادة وجيب تمام الزاوية الحادة وظل الزاوية الحادة؟
- ماذا يرمز لجيب الزاوية وجيب تمام الزاوية وظل الزاوية؟
- ما اختصار جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية وظل الزاوية باللغة الإنجليزية؟
- كيف نجد جيب وجيب تمام وظل زاوية معلومة؟
- كيف نجد قياس الزاوية إذا عُلم قيمة الجيب أو قيمة جيب التمام أو قيمة الظل لها؟
- ما قيمة جا  $30^\circ$ ، جا  $60^\circ$ ، جتا  $30^\circ$ ، جتا  $60^\circ$ ، جا  $45^\circ$ ، جتا  $45^\circ$ ، ظا  $30^\circ$ ، ظا  $60^\circ$ ، ظا  $45^\circ$ ؟

كما يمكن طرح المثال الآتي لتذكير الطلبة بطريقة إيجاد جيب وجيب تمام وظل الزاوية:

هـ و د مثلث قائم الزاوية في و ، فيه هـ و = ٦ سم ، و د = ٨ سم ، احسب جا د ، جا هـ ، جتا د ، جتا هـ ، ظا د ، ظا هـ.

## تطبيق النموذج بمراحله الثلاث:

### ١ - المهام (Tasks): حيث يتم تقديم المهمة الأولى للطلبة من خلال عرضها عليهم بصورة جماعية

باستخدام جهاز العرض (الداتاشو).

أرسل لك صديقك خالد على الفيس بوك رسالة على الخاص يطلب إليك مساعدته في حل سؤال يحصل إذا قام بحله بطريقة صحيحة على ١٠ علامات زيادة من أستاذ الرياضيات وقد جاء فيه " أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، إذا كان قياس الزاوية أ يساوي س فجد ما يأتي: ١. قياس الزاوية ج ٢. جا أ ٣. جتا ج ٤. ماذا يمكنك أن تستنتج؟ " فكيف يمكنك مساعدة صديقك خالد للحصول على العلامات.

بعد التأكد من فهم الطلبة للمهمة والمطلوب يتم الانتقال للمرحلة التالية.

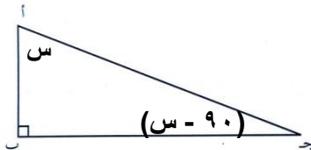
### ٢ - المجموعات المتعاونة (Cooperative groups): حيث يعمل الطلبة في مجموعات

تم تحديدها مسبقا لإنجاز المهمة السابقة من خلال التفكير في المهمة المعطاة بالطريقة التي يرونها مناسبة للوصول إلى الحل، مستخدمين خطوات حل المشكلة المتمثلة بالخطوات الأربع الآتية: فهم المشكلة، التخطيط للحل، تنفيذ الحل، والتأكد من صحة الحل، وتقوم كل مجموعة بتدوين الحلول التي توصلت إليها. مع مراعاة أن يقوم المعلم أثناء عمل المجموعات بالمراقبة والتجوال فيما بينها ومحاورة الطلبة دون أن يعطيهم الإجابات الصحيحة، كما يعمل على تشجيعهم على التفكير والحوار، ويمكن أن يقوم بإعطاء بعض التلميحات إذا وجد أن هناك بعض المجموعات التي لا تستطيع إكمال المهمة.

### ٣ - المشاركة (Sharing): بعد انتهاء الوقت المخصص لمرحلة المجموعات المتعاونة، يتم العمل ضمن

فريق واحد من خلال عرض المجموعات المتعاونة للحلول والأفكار التي توصلت إليها ومناقشتها مع باقي المجموعات لتعميق الفهم، ويتولى المعلم إدارة النقاش بين الطلبة وتقويم ما يتم التوصل إليه، والعمل في النهاية على تلخيص الإجابات والأفكار والحلول السليمة وتقديمها للطلبة بشكل مناسب مثل:

**فهم المشكلة:** المثلث قائم الزاوية في ب، قياس الزاوية أ يساوي س، المطلوب إيجاد قياس الزاوية ج، جا أ، جتا ج، وتحديد العلاقة بينهما.



**التخطيط للحل:** نرسم شكلا يوضح المسألة، ونحاول من خلاله استنتاج العلاقة بين الزاويتين أ، ج. كما يمكننا استخدام قانون الجيب وجيب التمام لإيجاد المطلوب الثاني والمطلوب الثالث ثم نبحث عن العلاقة المطلوبة رابعا بعد ذلك.

### تنفيذ الحل:

١. بما أن الزاويتين متتامتان (مجموع قياسيهما ٩٠°) فهذا يعني أن قياس الزاوية ج يساوي ٩٠° - س.

$$٢. \text{ جا } \alpha = \text{ جا } \theta = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \alpha}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$$

$$٣. \text{ جتا } \alpha = \text{ جتا } (٩٠^\circ - \theta) = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \alpha}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$$

٤. يمكننا الاستنتاج أن القيمتين متساويتان لأن الضلع المقابل للزاوية  $\alpha$  هو نفسه الضلع المجاور للزاوية  $\theta$  وكذلك الضلع المجاور للزاوية  $\alpha$  هو نفسه الضلع المقابل للزاوية  $\theta$  ولأن الزاويتين متتامتان فيمكننا استنتاج العلاقة بين جيب زاوية وجيب تمام متممها على النحو الآتي:

- جيب الزاوية يساوي جيب تمام متمم الزاوية أو جيب تمام الزاوية يساوي جيب متمم الزاوية.
- $\text{جا } \theta = \text{جتا } (٩٠^\circ - \theta)$  أو  $\text{جتا } \theta = \text{جا } (٩٠^\circ - \theta)$

**التأكد من صحة الحل:** هل أوجدنا كل المطلوب؟ هل القاعدة التي استخدمناها صحيحة؟ هل كل خطوات الحل صحيحة؟ هل يبدو الجواب منطقيًا؟ كما يمكننا استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد جيب أي زاوية وجيب تمام متممها للتأكد من صحة استنتاجنا.

**التقويم:** يقوم المعلم بالتأكد من فهم الطلبة للاستنتاجين السابقين من خلال قيام الطلبة بحل المشكلتين الآتيتين:

١- إذا كان  $\text{جتا } \theta = ٠,٨١٩٢$  ، فما قيمة  $\text{جا } \theta$  ؟ (دون استخدام الآلة الحاسبة)

٢- إذا كان  $\text{جا } \theta = ٥$  ، فما قيمة  $\text{س}$  بالدرجات؟ حيث  $٠ < \text{س} < ١٨^\circ$ .

وفي حال عدم وصول الطلبة لحل الفرع ٢ بطريقة أخرى يمكن هنا التنبيه على الطلبة إلى أنه يمكن حله بطريقة سهلة حيث أن  $\text{س}$  و  $\text{جا } \theta$  زاويتان متتامتان وبالتالي مجموعهما  $٩٠^\circ$  وهذا يعني أن  $\text{س} + \text{جا } \theta = ٩٠^\circ$  ، ومنه  $\text{س} = ٩٠^\circ$  ، وبالتالي  $\text{س} = ١٠^\circ$ .

بعد ذلك نطبق النموذج بمراحله الثلاث على المهمة التالية:

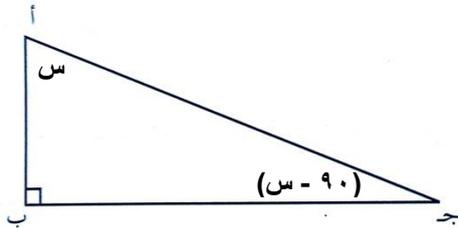
**١. المهام (Tasks):** حيث يتم تقديم المهمة الثانية للطلبة من خلال عرضها عليهم بصورة جماعية باستخدام جهاز

العرض (الداتاشو).

في الشكل المجاور،  $\alpha$  ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، استخدم الشكل

في إيجاد :

$$\text{جا } \alpha + \text{جتا } \alpha$$
 ، حيث  $\text{س}$  زاوية حادة.



بعد التأكد من فهم الطلبة للمهمة والمطلوب يتم الانتقال للمرحلة التالية.

**٢. المجموعات المتعاونة (Cooperative groups):** حيث يعمل الطلبة في مجموعات تم

تحديدها مسبقًا لإنجاز المهمة السابقة من خلال التفكير في الطريقة المناسبة لإيجاد المطلوب، مستخدمين خطوات حل المشكلة المتمثلة بالخطوات الأربع الآتية: فهم المشكلة، التخطيط للحل، تنفيذ الحل، والتأكد من صحة الحل، وتقوم كل

مجموعة بتدوين الحلول التي توصلت إليها. مع مراعاة أن يقوم المعلم أثناء عمل المجموعات بالمراقبة والتجوال فيما بينها ومحاورة الطلبة دون أن يعطيهم الإجابات الصحيحة، كما يعمل على تشجيعهم على التفكير والحوار، ويمكن أن يقوم بإعطاء بعض التلميحات إذا وجد أن هناك بعض المجموعات التي لا تستطيع إكمال المهمة.

### ٣. المشاركة (Sharing): بعد انتهاء الوقت المخصص لمرحلة المجموعات المتعاونة، يتم العمل ضمن فريق

واحد من خلال عرض المجموعات المتعاونة للحلول والأفكار التي توصلت إليها ومناقشتها مع باقي المجموعات لتعميق الفهم، ويتولى المعلم إدارة النقاش بين الطلبة وتقويم ما يتم التوصل إليه، والعمل في النهاية على تلخيص الإجابات والأفكار والحلول السليمة وتقديمها للطلبة بشكل مناسب مثل:

**فهم المشكلة:** الشكل يمثل مثلثاً قائم الزاوية، فيه الزاويتان أ و ج متتامتان، والمطلوب إيجاد قيمة مقدار معين.

**التخطيط للحل:** يمكن تطبيق قانون الجيب لإيجاد جـ، وتطبيق قانون جيب التمام لإيجاد جـ، ثم محاولة إيجاد قيمة المقدار.

$$\text{تنفيذ الحل: } \text{جـ} = \frac{\text{المقابل للزاوية أ}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \quad ، \quad \text{جـ} = \frac{\text{المجاور للزاوية أ}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{أ}}{\text{أ}}$$

$$\text{جـ} + \text{جـ} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} + \frac{\text{أ}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} + 1 = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} + \frac{\text{أ}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب} + \text{أ}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} + 1 = 1$$

**التأكد من صحة الحل:** هل أوجدنا المطلوب؟ هل القاعدة التي استخدمناها صحيحة؟ هل كل خطوات الحل صحيحة؟ كما يمكننا استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة المقدار لأية زاوية حادة س والتأكد من أن قيمة المقدار النهائية ستكون ١.

**التقويم:** يقوم المعلم بالتأكد من فهم الطلبة لهذه القاعدة من خلال قيام الطلبة بحل المشكلتين الآتيتين:

١- إذا كانت س زاوية حادة، وكان جـ = ٠,٨، فما قيمة جـ س؟

٢- جد القيمة العددية للمقدار: جـ ١٥° + جـ ٧٥°.

**الملخص والواجب البيتي:** يقدم المعلم في النهاية ملخصاً للحصة ويكلفهم بحل المشكلتين الآتيتين كواجب بيبي مع

التأكيد على عدم استخدام الآلة الحاسبة إلا للتأكد من صحة الحل:

١. جد القيمة العددية للمقادير:

• جـ ٣٣° - جـ ٥٧°

• جـ ٣ - جـ ١٩° - جـ ٧١°

• جـ ٨٣° + جـ ٧°

٢. إذا كان جـ ١٧° = ٠,٣، فما قيمة جـ ٧٣°؟

التوزيع المقترح لوقت الحصة: التمهيد (٦ دقائق)، المهمة الأولى (١٠ دقائق)، المهمة الثانية (١٠ دقائق)، التقويم (٨ دقائق)، الملخص والواجب البيتي (٦ دقائق).

## التمهيد:

الترحيب بالطلبة ثم تذكيرهم بما تم التوصل له في الحصة السابقة من استنتاجات ويقوم المعلم بحل الواجب البيتي للطلبة لمراجعة طريقة استخدام هذه الاستنتاجات في الحل.

### ١. المهام (Tasks):

العرض (الداتاشو).

لدى زيارتك لصديقك علي شاهدته يلعب بلعبة جميلة على حاسوبه الشخصي فطلبتها منه فأعطاك القرص لتحميلها على حاسوبك، لكنك اكتشفت حاجتك لكلمة سر لإتمام عملية التحميل، فاتصلت بصديقك ليعطيك كلمة السر فاشترط عليك أن تقوم بحل السؤال التالي: " المثلث أ ب ج قائم الزاوية في ب، إذا كان قياس الزاوية أ يساوي س، فاكشف العلاقة التي تربط بين ظا س من جهة و جاس و جتا س من جهة أخرى " فهل يمكنك الحصول على اللعبة التي أعجبتك؟

بعد التأكد من فهم الطلبة للمهمة والمطلوب يتم الانتقال للمرحلة التالية.

### ٢. المجموعات المتعاونة (Cooperative groups):

تحديدها مسبقا لإنجاز المهمة السابقة من خلال التفكير في الطريقة المناسبة لإيجاد المطلوب، مستخدمين خطوات حل المشكلة المتمثلة بالخطوات الأربع الآتية: فهم المشكلة، التخطيط للحل، تنفيذ الحل، والتأكد من صحة الحل، وتقوم كل مجموعة بتدوين الحلول التي توصلت إليها. مع مراعاة أن يقوم المعلم أثناء عمل المجموعات بالمراقبة والتجوال فيما بينها ومحاورة الطلبة دون أن يعطيهم الإجابات الصحيحة، كما يعمل على تشجيعهم على التفكير والحوار، ويمكن أن يقوم بإعطاء بعض التلميحات إذا وجد أن هناك بعض المجموعات التي لا تستطيع إكمال المهمة.

### ٣. المشاركة (Sharing):

واحد من خلال عرض المجموعات المتعاونة للحلول والأفكار التي توصلت إليها ومناقشتها مع باقي المجموعات لتعميق الفهم، ويتولى المعلم إدارة النقاش بين الطلبة وتقويم ما يتم التوصل إليه، والعمل في النهاية على تلخيص الإجابات والأفكار والحلول السليمة وتقديمها للطلبة بشكل مناسب مثل:

فهم المشكلة: يجب حل السؤال للحصول على كلمة السر. في السؤال، المثلث قائم الزاوية في ب، قياس الزاوية أ يساوي س، المطلوب إيجاد العلاقة التي تربط بين ظاس من جهة، و جاس و جتا س من جهة أخرى.

التخطيط للحل: يتم إيجاد قيمة كل من جاس و جتا س والرموز ثم محاولة إيجاد علاقة تربط بينها.

## تنفيذ الحل:

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \text{جتا س} \quad \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \text{جا س}$$

$$\frac{\text{ب ج}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \text{ظا س}$$

ويمكن ملاحظة أن ظاس فيه المقابل في البسط وهو موجود في جاس، والمجاور في المقام وهو موجود في جتاس وبالتالي يمكن قسمة كل من البسط والمقام على الوتر لنحصل على:

$$\frac{\text{ظا س}}{\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتاس}} \cdot \text{ومن ذلك يمكن استنتاج العلاقة ظا س} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتاس}} \cdot \text{حيث جتا س} \neq 0$$

**التأكد من صحة الحل:** هل أوجدنا المطلوب؟ هل القاعدة التي استخدمناها صحيحة؟ هل كل خطوات الحل صحيحة؟ هل الحسابات التي قمنا بها صحيحة؟ هل يبدو الجواب منطقياً؟ هل يوجد طريقة أخرى لإيجاد الحل؟ كما يمكن استخدام الآلة الحاسبة للتأكد من صحة العلاقة.

بعد ذلك نطبق النموذج بمراحله الثلاث على المهمة التالية:

## ١. المهام (Tasks):

حيث يتم تقديم المهمة الثانية للطلبة من خلال عرضها عليهم بصورة جماعية باستخدام جهاز العرض (الداشوا).  
إذا كانت س زاوية حادة، وكان ظا س = ٣، فجد جا س ، جتا س.

بعد التأكد من فهم الطلبة للمهمة والمطلوب يتم الانتقال للمرحلة التالية.

## ٢. المجموعات المتعاونة (Cooperative groups):

تحديدها مسبقاً لإنجاز المهمة السابقة من خلال التفكير في المهمة المعطاة بالطريقة التي يرونها مناسبة للوصول إلى الحل، مستخدمين خطوات حل المشكلة المتمثلة بالخطوات الأربع الآتية: فهم المشكلة، التخطيط للحل، تنفيذ الحل، والتأكد من صحة الحل، وتقوم كل مجموعة بتدوين الحلول التي توصلت إليها. مع مراعاة أن يقوم المعلم أثناء عمل المجموعات بالمراقبة والتجوال فيما بينها ومحاوره الطلبة دون أن يعطيهم الإجابات الصحيحة، كما يعمل على تشجيعهم على التفكير والحوار، ويمكن أن يقوم بإعطاء بعض التلميحات إذا وجد أن هناك بعض المجموعات التي لا تستطيع إكمال المهمة.

### ٣. المشاركة (Sharing): بعد انتهاء الوقت المخصص لمرحلة المجموعات المتعاونة، يتم العمل ضمن فريق

واحد من خلال عرض المجموعات المتعاونة للحلول والأفكار التي توصلت إليها ومناقشتها مع باقي المجموعات لتعميق الفهم، ويتولى المعلم إدارة النقاش بين الطلبة وتقويم ما يتم التوصل إليه، والعمل في النهاية على تلخيص الإجابات والأفكار والحلول السليمة وتقديمها للطلبة بشكل مناسب مثل:

**فهم المشكلة:** يوجد معنا قيمة ظل الزاوية، والمطلوب قيمة الجيب وجيب التمام لنفس الزاوية.

**التخطيط للحل:** من المعلوم أن  $\text{ظا س} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$  ، كما أن  $\text{جا س} + \text{جتا س} = 1$  ، وبالتالي يمكن استخدام العلاقتين لتنفيذ الحل.

**تنفيذ الحل:**  $\text{ظا س} = 3$  ، ومنه  $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = 3$  ، ومنه  $\text{جا س} = 3 \text{ جتا س}$  ، ومنه  $\text{جتا س} = \frac{1}{10}$

لكن  $\text{جا س} + \text{جتا س} = 1$  إذن:

$$3 \text{ جتا س} + \text{جتا س} = 1$$

$$4 \text{ جتا س} = 1$$

$$\text{جتا س} = \frac{1}{4}$$

$$\text{جتا س} = \frac{1}{4}$$

$$\text{جتا س} = \frac{1}{4} ، \text{ ومنه جا س} = 3 \text{ جتا س} = \frac{3}{4}$$

**التأكد من صحة الحل:** هل أوجدنا المطلوب؟ هل القاعدة التي استخدمناها صحيحة؟ هل كل خطوات الحل صحيحة؟ هل الحسابات التي قمنا بها صحيحة؟ هل يبدو الجواب منطقياً؟ هل يوجد طريقة أخرى لإيجاد الحل؟ كما يمكن قسمة قيمة جاس على قيمة جتاس ومقارنتها بقيمة ظاس.

يمكن تنبيه الطلبة إلى وجود طريقة أسهل لحل هذه المشكلة تتمثل في اعتبار قيمة ظاس = 3 تمثل نسبة المقابل إلى المجاور وليس قيمهما الأصلية وبالتالي تكون نسبة الوتر مقارنة بنسبتي المقابل والمجاور حسب نظرية فيثاغورس  $\sqrt{10}$  . ثم يمكن إيجاد نسبة المقابل إلى الوتر لإيجاد قيمة الجيب، ونسبة المجاور إلى الوتر لإيجاد قيمة جيب التمام.

**التقويم:** يقوم المعلم بالتأكد من تحقق أهداف الدرس من خلال قيام الطلبة بحل المشكلة الآتية:

$$\text{أثبت أن ظاس} \times \text{ظا} (90^\circ - \text{س}) = 1$$

**المخلص والواجب البيتي:** يقدم المعلم في النهاية ملخصا للحصة ويكلفهم بحل المشكلتين الآتيتين كواجب بيتي:

١- إذا كان  $s$  زاوية حادة، وكان  $\cos s = \frac{3}{5}$ ، فجد  $\sin s$ ،  $\tan s$ .

٢- إذا كان  $s$  زاوية حادة، وكان  $\sin s = \frac{2}{5}$  فجد:  $\cos s$ ،  $\tan s$ .